

## kgV - ggT

kgV: kleinstes gemeinsames Vielfaches

ggT: grösster gemeinsamer Teiler

---

Satz: Zwei Brüche  $\frac{a}{b}$  und  $\frac{c}{d}$  sind gleich, wenn die Produkte aus Zähler des einen Bruchs mit dem Nenner des anderen Bruchs übereinstimmen:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \cdot d = b \cdot c$$

Bsp:  $\frac{3}{8} = \frac{12}{32} \Rightarrow$  da  $3 \cdot 32 = 8 \cdot 12 = 96$

Bsp:  $\frac{2}{x-1} = \frac{2x+2}{x^2-1} \Rightarrow$  da  $2 \cdot (x^2-1) = (x-1) \cdot (2x+2) = 2x^2-2$

Satz: (Kürzen/Erweitern) Werden Zähler und Nenner eines Bruchs mit der gleichen Zahl (Term) ungleich Null multipliziert, so ändert sich der Wert des Bruchs nicht:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot z}{b \cdot z} \quad (z \neq 0)$$

Erweitern  $\rightarrow$   
Kürzen  $\leftarrow$

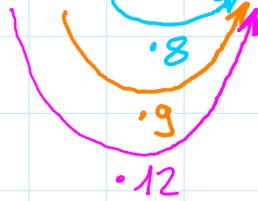
Bsp:  $\frac{12}{32} = \frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 4} = \frac{3}{8}$

Bsp:  $\frac{2x+2}{x^2-1} = \frac{2 \cdot (x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x-1}$

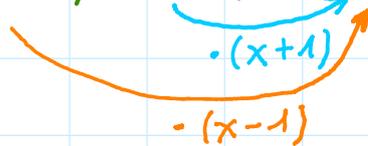
---

kgV: kleinstes gemeinsames Vielfaches

• Bsp:  $\text{kgV}(6, 8, 9) = 72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$



• Bsp:  $\text{kgV}(x^2+x, x^2-x) = x^3 - x = x \cdot (x+1) \cdot (x-1)$



ggT: grösster gemeinsamer Teiler

• Bsp:  $\text{ggT}(27, 126) = 9 \Rightarrow \begin{matrix} 27 = 9 \cdot 3 \\ 126 = 9 \cdot 14 \end{matrix}$

• Bsp:  $\text{ggT}(x^2+3x+2, x^2+4x+4) = x+2$

$\Rightarrow x^2+3x+2 = (x+2) \cdot (x+1), x^2+4x+4 = (x+2) \cdot (x+2)$

Faktorisieren!!!

Satz: (Primfaktorzerlegung) Jede natürliche Zahl (jeder mathematische Ausdruck) kann bis auf die Reihenfolge eindeutig in ein Produkt von Primzahlen (nicht mehr reduzierbare Faktoren) zerlegt werden!

• Bsp: 
$$\begin{aligned} 5355 &= 3 \cdot 1785 \\ &= 3 \cdot 3 \cdot 595 \\ &= 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 119 \\ &= 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17 \end{aligned}$$

$$= \underline{\underline{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17}}$$

• Bsp:  $x^5 - 16x = x \cdot (x^4 - 16)$   
 $= x \cdot (x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4)$   
 $= \underline{\underline{x \cdot (x^2 + 4) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)}}$

ggT - kgV - Bestimmung mittels Primfaktorzerlegung

• Bsp:  $\text{ggT}(5355, 2244)$

$$\begin{array}{r} 5355 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17 \\ 2244 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 17 \\ \hline 3 \cdot 17 = 51 = \underline{\underline{\text{ggT}(5355, 2244)}} \end{array}$$

$$\underline{\underline{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 = 235620 = \text{kgV}(5355, 2244)}}$$

• Bsp:  $\text{ggT}(x^3 - 4x^2 + 4x, x^4 - 4x^2)$

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + 4x = x \cdot (x - 2) \cdot (x - 2) \\ x^4 - 4x^2 = x \cdot x \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) \\ \hline x \cdot (x - 2) = \underline{\underline{x^2 - 2x}} \quad (\text{ggT}) \end{array}$$

$$\underline{\underline{x \cdot x \cdot (x - 2) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)}} \quad (\text{kgV})$$

Euklid'scher Algorithmus:

• Bsp:  $\text{ggT}(5355, 2244) = ?$

$$5355 = 2 \cdot 2244 + 867$$

$$5355 = 2 \cdot 2244 + 867$$


$$2244 = 2 \cdot 867 + 510$$

$$867 = 1 \cdot 510 + 357$$

$$510 = 1 \cdot 357 + 153$$

$$357 = 2 \cdot 153 + 51$$

$$153 = 3 \cdot 51 + 0$$

$$\underbrace{\underbrace{\text{ggT}(5355, 2244) = 51}}_{\text{purple underline}}$$

Satz:  $\boxed{\text{ggT}(a, b) \cdot \text{kgV}(a, b) = a \cdot b}$

$$\Rightarrow \text{kgV}(5355, 2244) = \frac{5355 \cdot 2244}{51} = \underline{\underline{235620}}$$

---