kgV - ggT

kgV: kleinstes gemeinsames Vielfaches
ggT: grösster gemeinsamer Teiler

Satz: Zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ sind gleich, wenn die Produkte aus Zähler des einen Bruchs mit dem Nenner des anderen Bruchs übereinstimmen:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \cdot d = b \cdot c}$$

Bsp: $\frac{3}{8} = \frac{12}{32} \Rightarrow$ da $3 \cdot 32 = 8 \cdot 12 = 96$

Bsp: $\frac{2}{x-1} = \frac{2x+2}{x^2-1} \Rightarrow$ da $2 \cdot (x^2-1) = (x-1) \cdot (2x+2) = 2x^2-2$

Satz: (Kürzen/Erweitern) Werden Zähler und Nenner eines Bruchs mit der gleichen Zahl (Term) ungleich Null multipliziert, so ändert sich der Wert des Bruchs nicht:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \cdot z}{b \cdot z}} \qquad (z \neq 0)$$

$\xrightarrow{\hspace{3em}}$ Erweitern

Kürzen $\xleftarrow{\hspace{3em}}$

Bsp: $\frac{12}{32} = \frac{3 \cdot \cancel{4}}{8 \cdot \cancel{4}} = \frac{3}{8}$

Bsp: $\frac{2x+2}{x^2-1} = \frac{2 \cdot \cancel{(x+1)}}{(x-1)\cancel{(x+1)}} = \frac{2}{x-1}$

---

kgV: kleinstes gemeinsames Vielfaches

- Bsp: $\text{kgV}(6,8,9) = 72 = 2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3$

  $\cdot 8$

  $\cdot 9$

  $\cdot 12$

- Bsp: $\text{kgV}(x^2+x,\ x^2-x) = x^3 - x = x\cdot(x+1)\cdot(x-1)$

  $\cdot(x+1)$

  $\cdot(x-1)$

ggT: grösster gemeinsamer Teiler

- Bsp: $\text{ggT}(27, 126) = 9 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} 27 = 9\cdot 3 \\ 126 = 9 \cdot 14 \end{matrix}$

- Bsp: $\text{ggT}(x^2+3x+2,\ x^2+4x+4) = x+2$

  $\Rightarrow\ x^2+3x+2 = (x+2)\cdot(x+1)\ ,\ x^2+4x+4 = (x+2)\cdot(x+2)$

Faktorisieren!!!

Satz: (Primfaktorzerlegung) Jede natürliche Zahl (jeder mathematische Ausdruck) kann bis auf die Reihenfolge eindeutig in ein Produkt von Primzahlen (nicht mehr reduzierbare Faktoren) zerlegt werden!

- Bsp:
$$\begin{aligned} 5355 &= 3\cdot 1785 \\ &= 3\cdot3\cdot595 \\ &= 3\cdot3\cdot5\cdot119 \\ &= \underline{3\cdot3\cdot5\cdot7\cdot17} \end{aligned}$$

$$= 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$$

- Bsp: $x^5 - 16x = x \cdot (x^4 - 16)$

$$= x \cdot (x^2+4) \cdot (x^2-4)$$

$$= x \cdot (x^2+4) \cdot (x+2) \cdot (x-2)$$

---

ggT- / kgV- Bestimmung mittels Primfaktorzerlegung

- Bsp: ggT(5355, 2244)

$$\begin{array}{rcl} 5355 & = & 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17 \\ 2244 & = & 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 17 \\ \hline & & 3 \cdot 17 = 51 = ggT(5355, 2244) \end{array}$$

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 = 235620 = kgV(5355, 2244)$$

- Bsp: $ggT(x^3 - 4x^2 + 4x,\ x^4 - 4x^2)$

$$\begin{array}{rcl} x^3 - 4x^2 + 4x & = & x \cdot (x-2) \cdot (x-2) \\ x^4 - 4x^2 & = & x \cdot x \cdot (x-2) \cdot (x+2) \\ \hline & & x \cdot (x-2) = x^2 - 2x \quad (ggT) \end{array}$$

$$x \cdot x \cdot (x-2) \cdot (x-2) \cdot (x+2) \quad (kgV)$$

Euklid'scher Algorithmus:

- Bsp: ggT(5355, 2244) = ?

$$5355 = 2 \cdot 2244 + 867$$

$$5355 = 2 \cdot 2244 + 867$$

$$2244 = 2 \cdot 867 + 510$$

$$867 = 1 \cdot 510 + 357$$

$$510 = 1 \cdot 357 + 153$$

$$357 = 2 \cdot 153 + 51$$

$$153 = 3 \cdot 51 + 0$$

$$\underline{\underline{ggT(5355, 2244) = 51}}$$

Satz: $\boxed{ggT(a,b) \cdot kgV(a,b) = a \cdot b}$

$$\Rightarrow kgV(5355, 2244) = \frac{5355 \cdot 2244}{51} = \underline{\underline{235620}}$$
