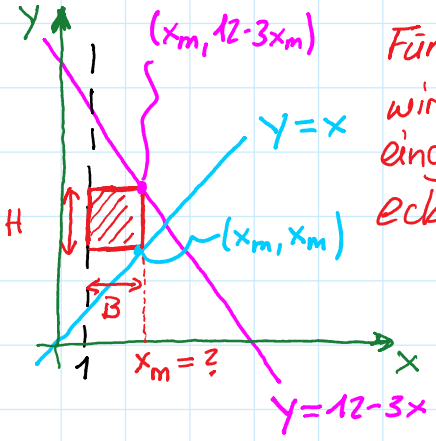
Quadratische Funktionen

- Einführungsbeispiel
- Definition
- Charakteristische Grössen
- Einschub quadratische Ergänzung
- Scheitelpunkt
- Nullstellen / quadratische Gleichung
- Darstellungsformen
- Aufstellen der Funktionsgleichung

Def: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = f(x) = ax^2 + bx + c$

Einführungsbeispiel (Extremwertaufgabe)



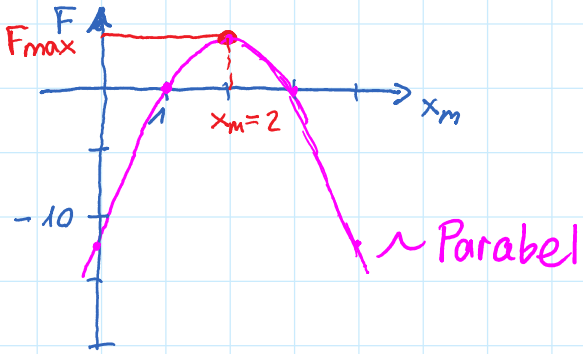
Für welchen Wert x_m wird die Fläche des eingezeichneten Rechtecks maximal?

$$F = F(x_m) = B \cdot H = (x_m - 1) \cdot (12 - 3x_m - x_m)$$
$$= (x_m - 1)(12 - 4x_m)$$
$$F(x_m) = -4x_m^2 + 16x_m - 12$$

quadratische Fkt. $\to a = -4, b = 16, c = -12$

Wertetabelle → Graph

x_m	F
0	-12
1	0
2	4
3	0
4	-12
5	-32



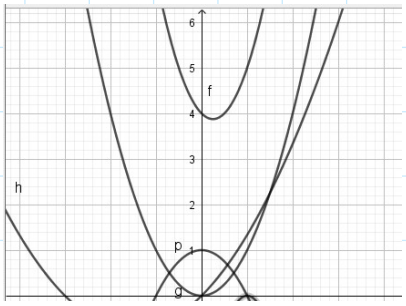
- **Definition**

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c \to \text{"Parabeln"}$$

Bsp: $y = 2x^2 - x + 4 \to a = 2, b = -1, c = 4$

$y = -x^2 + 1 \to a = -1, b = 0, c = 1$

$y = \frac{x^2}{2} + x \to a = \frac{1}{2}, b = 1, c = 0$

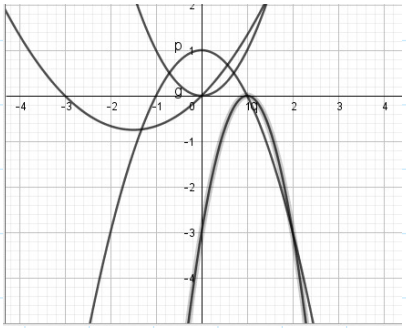


$y = -x^2 + 1 \rightarrow a=-1, b=0, c=1$

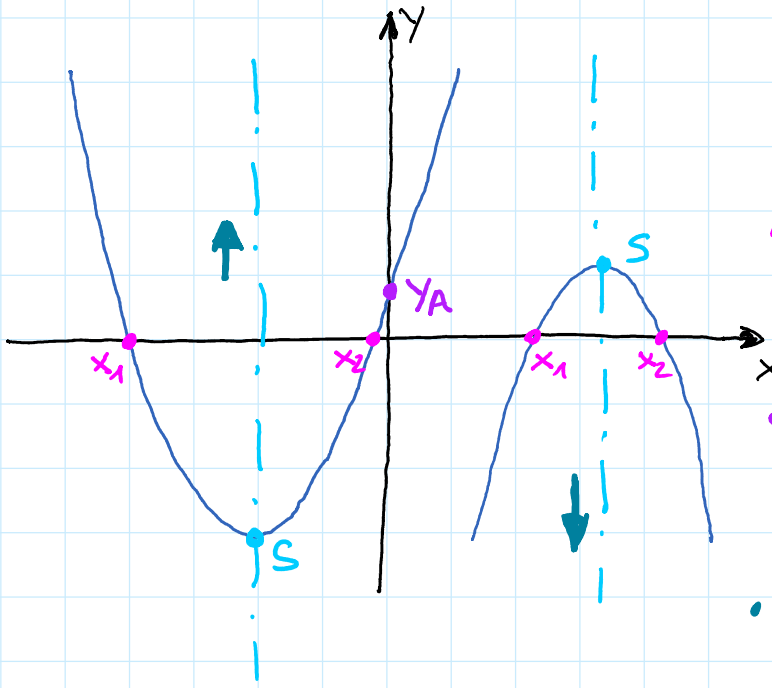
$y = \frac{x^2}{3} + x \rightarrow a=\frac{1}{3}, b=1, c=0$

$y = x^2 \rightarrow a=1, b=0, c=0$

$y = -3x^2 + 6x - 3 \rightarrow a=-3, b=6, c=-3$



• Charakteristische Grössen



- Scheitelpunkt (Min / Max) → Symmetrie
- Nullstellen (Schnittpunkte mit der x-Achse)
- y-Achsenabschnitt (Schnittpunkt mit der y-Achse)
- Öffnung der Parabel

Einschub "quadratische Ergänzung"

x kommt 2mal vor!

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$

$= a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$

$= a \cdot \left[x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$

Binom → quadr. Term des Binoms ergänzen!

$= a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right]$

$= a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$

x kommt nur noch einmal vor!

Bsp: $y = 2x^2 - 8x - 10$

$= 2(x^2 - 4x - 5)$

$= 2(x^2 - 4x + 4 - 4 - 5)$

$= 2((x-2)^2 - 9)$

$= 2(x-2)^2 - 18$

• Scheitelpunkt

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

≥ 0

≥ 0

$$\geq -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Bsp: $y = 2 \cdot (x-2)^2 - 18$

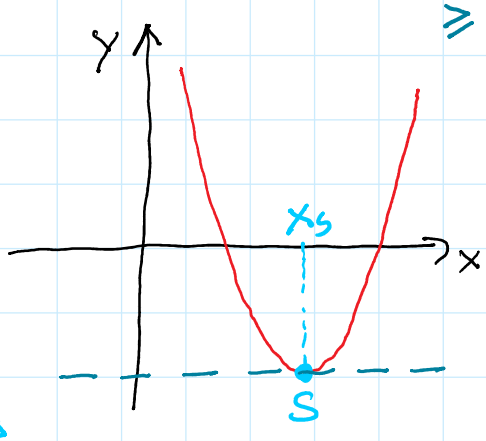
≥ 0

≥ 0

≥ -18

$$x + \frac{b}{2a} = 0$$

$$\Rightarrow x_S = -\frac{b}{2a}$$



$$-18 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

y_S

$$\Rightarrow S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$ ↯↯

$\Rightarrow$ Einführungsbeispiel: $F(x_M) = -4x_M^2 + 16x_M - 12$

$\downarrow$

$a = -4,\ b = 16,\ c = -12$

$$\Rightarrow x_M = -\frac{b}{2a} = -\frac{16}{2 \cdot (-4)} = 2$$

$$\Rightarrow F_{max} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{16^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-12)}{2 \cdot (-4)} = 8$$

• Nullstellen / quadratische Gleichung

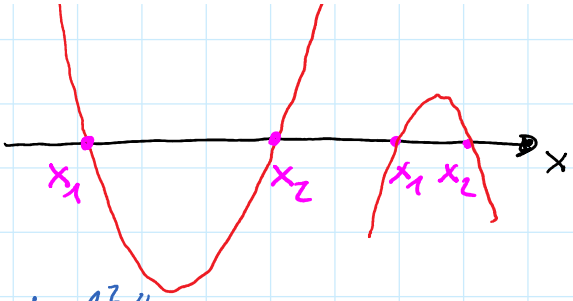
→ Bei den Nullstellen ist der y-Wert gleich Null!

$\downarrow$

$y = f(x) = ax^2 + bx + c = 0$

$y = f(x) = \boxed{ax^2 + bx + c = 0}$

quad. Gleichung



$\downarrow$ quad. Ergänzung!

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0 \quad | + \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \quad | : a$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad | \sqrt{\ }$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad | - \frac{b}{2a}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Nullstellen der quad. Funktion (Mitternachtsformel)

Bsp: $y = f(x) = 2x - 8x - 10$

$\downarrow$

$a = 2,\ b = -8,\ c = -10$

$\Downarrow$

$$x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10)}}{2 \cdot 2} = \frac{8 \pm \sqrt{-16}}{4}$$

$\sqrt{-16}$: nicht erlaubt!

$\Rightarrow$ keine Nullstellen!

Bsp: $y = f(x) = 3x^2 + 8x - 3$

$\downarrow$

$a = 3,\ b = 8,\ c = -3$

$\Downarrow$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3)}}{2 \cdot 3} = \frac{-8 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{-8 \pm 10}{6}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-8 + 10}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}, \quad x_2 = \frac{-8 - 10}{6} = \underline{\underline{-3}}$$

$\Rightarrow$ 2 Nullstellen!

Bsp: $y = f(x) = -x^2 + 6x - 9$

$\downarrow$

$a=-1,\ b=6,\ c=-9$

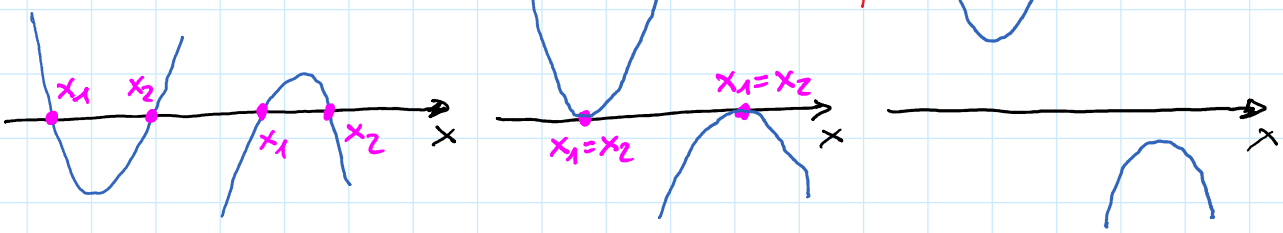
$\Downarrow$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-9)}}{2\cdot(-1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{-2} = \underline{\underline{3}}$$

$\Rightarrow$ 1 Nullstelle!

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \rightarrow D = b^2 - 4ac \quad \text{(Diskriminante)}$$

$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
2 Nullstellen	1 Nullstelle	keine Nullstellen
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	



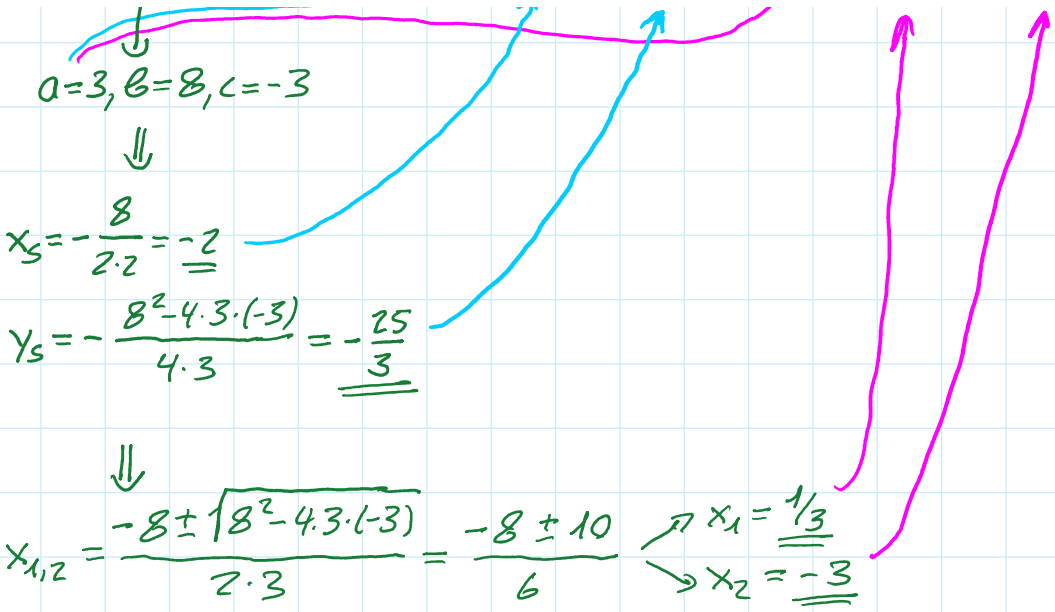
- Darstellungsformen

$$y = f(x) = \underbrace{ax^2 + bx + c}_{\text{Normalform}} = \underbrace{a\cdot(x - x_S)^2 + y_S}_{\text{Scheitelform } S(x_S, y_S)} \underset{\text{wenn } D \geq 0}{=} \underbrace{a\cdot(x - x_1)(x - x_2)}_{\text{Nullstellenform / Produktform}}$$

$\rightarrow$ quad. Ergänzung

Bsp: $y = f(x) = 3x^2 + 8x - 3 = 3\cdot(x - (-2))^2 - \frac{25}{3} = 3(x - \frac{1}{3})(x - (-3))$

$a=3,\ b=8,\ c=-3$



$a=3, b=8, c=-3$

$\Downarrow$

$x_S = -\frac{8}{2\cdot 2} = -2$

$y_S = -\frac{8^2-4\cdot 3\cdot(-3)}{4\cdot 3} = -\frac{25}{3}$

$\Downarrow$

$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2-4\cdot 3\cdot(-3)}}{2\cdot 3} = \frac{-8\pm 10}{6}$ $\nearrow x_1 = \frac{1}{3}$ $\searrow x_2 = -3$

• Aufstellen der Funktionsgleichung

$\Rightarrow$ Durch 3 Punkte (Angaben) ist eine Parabel (quad. Funktion) eindeutig bestimmt!

Bsp: 1. Parabel durch die drei Punkte $U(-2,-9)$, $V(4,15)$ und $W(12,-9)$

$\rightarrow$ Punkte im Ansatz $y = ax^2+bx+c$ einsetzen

$$\begin{array}{l|l|l} U(-2,-9): & -9 = 4a-2b+c & a=-\frac{1}{2} \\ V(4,15): & 15 = 16a+4b+c & \Rightarrow\ b=5 \\ W(12,-9): & -9 = 144a+12b+c & c=3 \end{array} \quad \Rightarrow\ y = -\frac{1}{2}x^2+5x+3$$

2. Parabel mit Scheitelpunkt $S(2,4)$ durch den Punkt $P(-1,1)$

$\rightarrow$ Punkt $P(-1,1)$ in der Scheitelform $y = a(x-2)^2+4$ einsetzen

$P(-1,1)$: $1 = a(-1-2)^2+4 = 9a+4 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{3}(x-2)^2+4 = -\frac{1}{3}(x^2-4x+4)+4 = -\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}$

3. Parabel mit den Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$ durch den Punkt $P(4,-5)$

→ Punkt $P(4,-5)$ in Nullstellenform einsetzen $y = a(x+2)(x-1)$

$P(4,-5)$: $-5 = a \cdot (4+2)(4-1) = 18a \Rightarrow \underline{a = -\frac{5}{18}}$

$\Rightarrow \underline{\underline{y = -\frac{5}{18}(x+2)(x-1) = -\frac{5}{18}(x^2+x-2) = -\frac{5}{18}x^2 - \frac{5}{18}x + \frac{5}{9}}}$