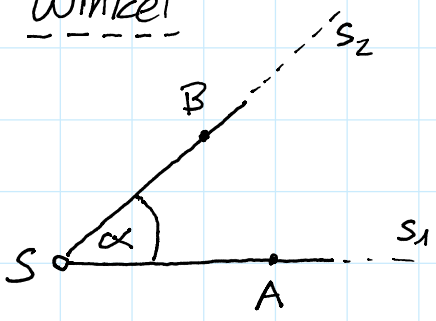
Winkel und Winkelbeziehungen

Winkel

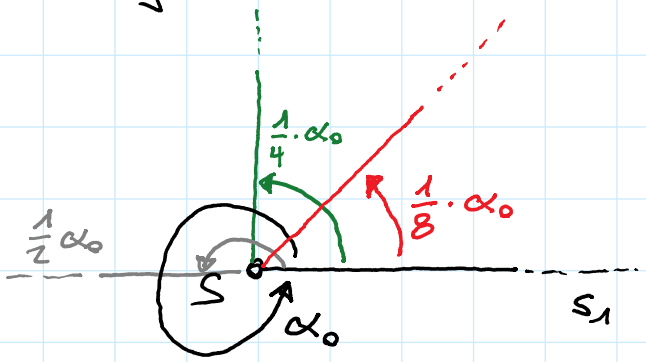


Def: Unter dem Winkel α ($\sphericalangle ASB$) versteht man die Öffnung zwischen zwei Strahlen (s_1 und s_2) welche von einem gemeinsamen Punkt S (Scheitel) ausgehen.

Alternativ: Der Winkel α beschreibt die Grösse der Drehung um den Scheitel s_1 auf den Scheitel s_2 überzuführen. Hier können wir den Winkeln auch eine Orientierung (Vorzeichen) zuweisen. Drehungen im Gegenuhrzeigersinn werden dabei als positive Winkel erfasst!

Winkelmessung

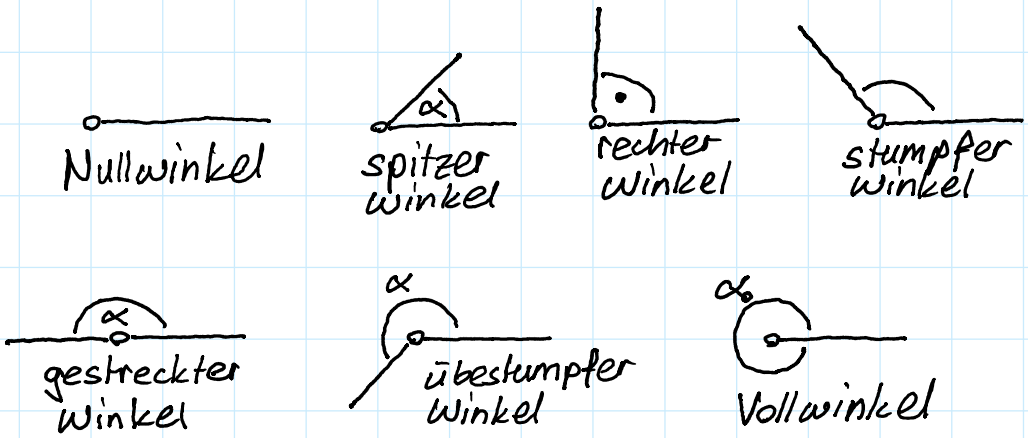
Für die Messung eines Winkels wird eine lineare Skala / Unterteilung verwendet. Dabei ist die Grösse des Winkels als Anteil des Vollwinkels α_0 zu verstehen, wobei der Vollwinkel eine komplette Drehung beschreibt:



Verschiedene Massysteme:

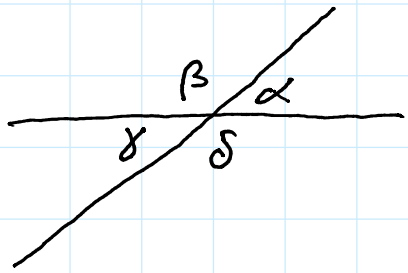
- Grad (Altgrad) : $\alpha_0 = 360°$
- Neugrad : $\alpha_0 = 400\,\text{gon}$
- Bogenmass : $\alpha_0 = 2 \cdot \pi$ (Bogenlänge Einheitskreis)

Wir unterscheiden:



Winkelbeziehungen (Gesetze)

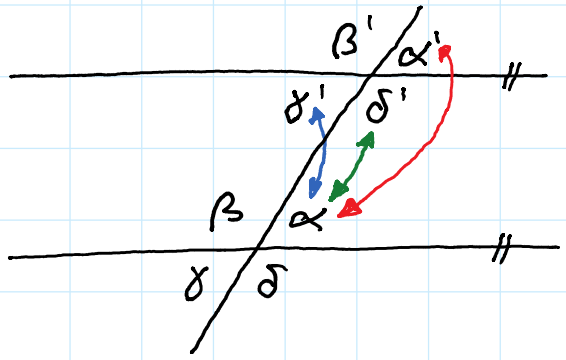
- Winkel an sich schneidenden Geraden:



⇒ gegenüberliegende Winkel nennt man Scheitelwinkel, diese sind gleich gross:
$\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$

⇒ aneinander angrenzende Winkel nennt man Nebenwinkel, sie ergänzen sich zu einem gestreckten Winkel (180°)
$\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = 180°$

- Winkel an Parallelen:

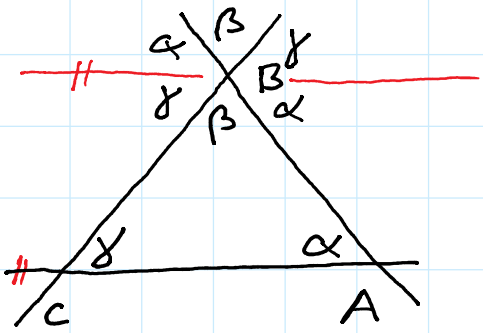


⇒ Stufenwinkel sind gleich gross:
$\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $\delta = \delta'$

⇒ Wechselwinkel sind gleich gross:
$\alpha = \gamma'$, $\beta = \delta'$, $\gamma = \alpha'$, $\delta = \beta'$

⇒ Gegenwinkel ergänzen sich auf 180°:
$\alpha+\delta'=\beta+\gamma'=\gamma+\beta'=\delta+\alpha'=180°$

- Winkel im Dreieck:

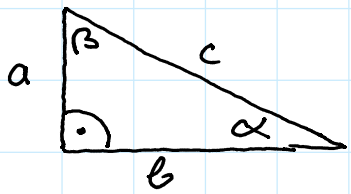


⇒ $2\alpha+2\beta+2\gamma=360°$

$$\boxed{\alpha+\beta+\gamma=180°}$$

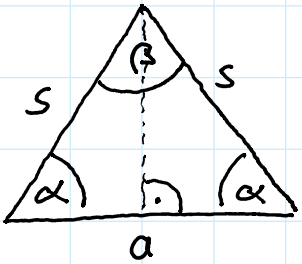
Die Summe der Innenwinkel beträgt immer 180°.

- Spezielle Dreiecke:



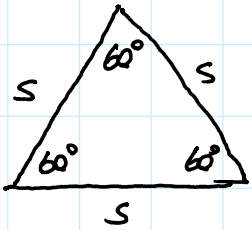
rechtwinkliges Dreieck

$$\boxed{\alpha+\beta=90°}$$



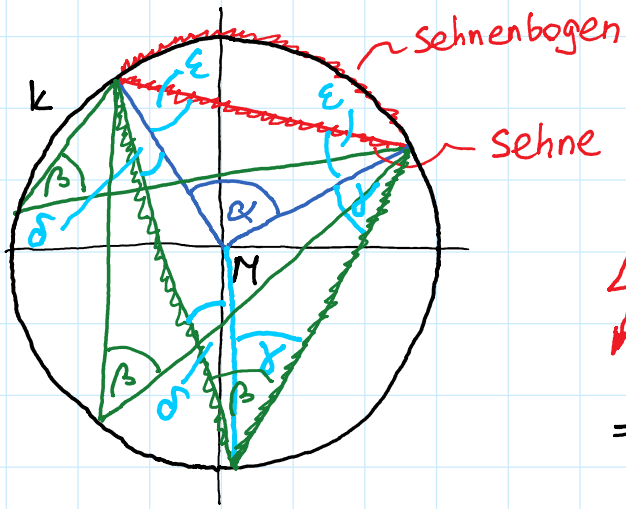
gleichschenkliges Dreieck

⇒ Basiswinkel (α) sind gleich



gleichseitiges Dreieck

- Winkel im Kreis:



α: Zentriwinkel
β: Peripheriewinkel

⇒ Alle Peripheriewinkel zu einer gegebenen Sehne bzw Sehnenbogen sind gleich gross

⇒ Der Zentriwinkel zu einer Sehne (Sehnenbogen) ist doppelt so gross wie die zur Sehne dazugehörigen

Beweis:
Es gilt $\gamma+\delta=\beta$

Es gilt $\gamma+\delta=\beta$
und $\varepsilon = 90° - \frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow$ Gestrecktes Dreieck

$$2\gamma + 2\delta + 2\varepsilon = 180°$$
$$2(\underbrace{\gamma+\delta}_{\beta}) + 2(90° - \tfrac{\alpha}{2}) = 180°$$
$$2\beta + 180° - \alpha = 180°$$
$$2\beta = \alpha \quad \square$$

zur Sehne dazugehörigen Peripheriewinkel

$$\boxed{\alpha = 2\beta}$$

Spezialfall → Thaleskreis

