Fachhochschule Nordwestschweiz (FHNW)
Hochschule für Technik
Institut für Mathematik- und Naturwissenschaft

Demofragen mündliche Abschlussprüfung Grundlage der Linearen Algebra (gla)

R. Burkhardt / J. Portmann 22.1.2022 (HS21) Data Science (DS)

Bemerkungen:

- Sie dürfen eine Formelsammlung im Umfang von 8 Seiten zur mündlichen Prüfung mitbringen
- Am Anfang der Prüfung ziehen Sie je einen Fragekomplexe aus den beiden Themenblöcken LE1/LE2 und LE3/LE4. Für die Beantwortung je Fragekomplex stehen ca. 10 Minuten Zeit zur Verfügung.

LE1/LE2: Lineare Gleichungssysteme / Matrizen

1. **Fragekomplex**
   Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{ccccccc} x & & & + & sz & = & 0 \\ 2x & + & sy & & & = & 1 \\ x & + & sy & + & z & = & 1 \end{array}\right|$$

   (a) Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem in Matrizenschreibweise ($Ax = b$) und bestimmen Sie die Koeffizientenmatrix und die erweiterte Koeffizientenmatrix.
   (b) Welches geometrische Problem wird durch ein solches Gleichungssystem beschrieben?
   (c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems für $s = 1$.
   (d) Kennen Sie weitere Lösungsverfahren?
   (e) Für welche Parameterwert s ist das System regulär bzw. singulär? Geometrische Deutung?

$$\left|\begin{array}{l} x \quad\quad + sz = 0 \\ 2x + sy \quad\quad = 1 \\ x + sy + z = 1 \end{array}\right| \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & s \\ 2 & s & 0 \\ 1 & s & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & s & 0 \\ 2 & s & 0 & 1 \\ 1 & s & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ebene im $\mathbb{R}^3$: $Ax + By + Cz + D = 0$

$\Rightarrow$ Schnittpunkt von 3 Ebenen!

$s=1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{} \begin{array}{l} II \leftarrow II - 2I \\ III \leftarrow III - I \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{} III \leftarrow III - II \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{} III \leftarrow \tfrac{1}{2} III$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{} \begin{array}{l} I \leftarrow I - III \\ II \leftarrow II + 2III \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x \quad = 0 \\ y \quad = 1 \\ z \quad = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(0,1,0)\}}}$$

$\Rightarrow$ Cramer, Inverse

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & s \\ 2 & s & 0 \\ 1 & s & 1 \end{vmatrix} = s + 0 + 2s^2 - s^2 - 0 - 0 = s^2 + s = s(s+1)$$

$\neq 0$ regulär $\hookrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$

$= 0$ singulär $\hookrightarrow \{0, -1\}$

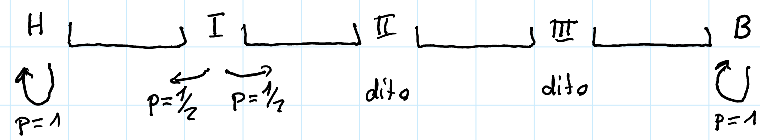
2. **Fragekomplex**
Wir betrachten die folgende Situation:
A man walks along a 4-block stretch of Madison Avenue. He starts at corner x and, with probability $\frac{1}{2}$, walks one block to the right and, with probability $\frac{1}{2}$, walks one block to the left; when he comes to the next corner he again randomly chooses his direction along Madison Avenue. He continues until he reaches corner 4, which is home, or corner 0, which is bar. If he reaches either home or bar, he stays there. The problem you pose is to find the probability $p(x)$ that the man, starting at corner x, will reach home before reaching bar (P.G. Doyle and J.L. Snell).
Um die Situation mathematisch zu analisieren betrachten wir den Vektor

$$\vec{v}(k) = \begin{pmatrix} p_{0,k} \\ p_{1,k} \\ p_{2,k} \\ p_{3,k} \\ p_{4,k} \end{pmatrix}$$

wobei $p_{x,k}$ die Wahrscheinlichkeit beschreibt nach k Schritten an der Ecke x zu sein. Die Schritte können mit der Übergangsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

mittels $\vec{v}(k+1) = M \cdot \vec{v}(k)$ beschrieben werden.
Wir beginnen an der Ecke 2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Ecken nach 1, 2, 3, ... Schritten. Wie sehen die Wahrscheinlichkeiten nach n Schritten aus? Wie könnte dieses Problem mit Python gelöst werden?



$$\vec{V}_{k+1} = M \cdot \vec{V}_k$$

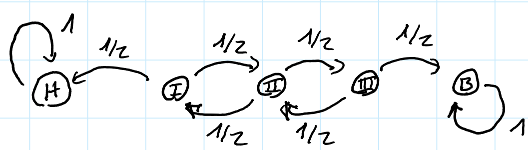
$$\vec{V}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{V}_2 = M \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/4 \end{pmatrix} \qquad \vec{V}_3 = M \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 0 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} \ldots$$

$$\vec{V}_2 = M \cdot M \vec{V}_0 \qquad \vec{V}_3 = M \cdot M \cdot M \cdot \vec{V}_0$$

$$\Longrightarrow \vec{V}_k = M^k \cdot \vec{V}_0$$

$M^2 = M \cdot M$:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



3. **Fragekomplex**

(a) Berechnen Sie A^2, A^3, A^4, A^5 und finden Sie eine Formel für A^n (mit $n \in \mathbb{N}$).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(c) Für welche Werte des Parameters k ist die Matrix C invertierbar? Bestimmen Sie die Inverse C^{-1} für $k = -1$.

$$C = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 2 & k & 2 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$

3a

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 21 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 2k & * \\ 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad * \sim k \cdot (2k+1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 21 & \ldots \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 8 & 36 & \ldots \end{pmatrix}$$

$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} \dots \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dots \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^n = \begin{pmatrix} \dots \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^4 = A \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 & 21 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 36 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ vollständiger Induktion!

$$\underset{1\cdot 3}{3},\ \underset{2\cdot 5}{10},\ \underset{3\cdot 7}{21},\ \underset{4\cdot 9}{36},\ \underset{5\cdot 11}{55},\ \dots$$

3b

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}}_{39} - (-1)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}}_{17} + 2\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}}_{-10} - 0 \begin{vmatrix} \dots \end{vmatrix} = \underline{\underline{36}}$$

3c

$$D = \begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 2 & k & 2 \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix} = k^3 + 0 + 0 - 0 - 2k - 2k = k^3 - 4k = k(k-2)(k+2)$$

$\neq 0$ regulär

$= 0$ sing. $\quad k \in \{-2, 0, 2\}$

$$\begin{array}{c} C \qquad\qquad E_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{II \leftarrow II + 2I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[III \leftarrow II - III]{I \leftarrow II - I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[II \leftarrow 3II - 2III]{I \leftarrow 3I - 2III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\cdot 1/3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{array}\right)$$

$$\underline{\underline{C^{-1}}} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$