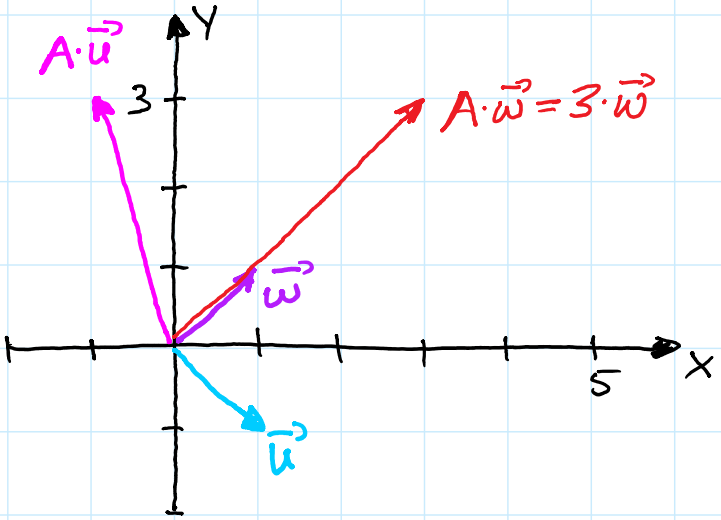
Beispiel: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{v} \mapsto A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}$

- $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \to f(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to f(\vec{w}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \vec{w}$ ↯



Def: Sei A eine $n \times n$-Matrix. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ heisst Eigenwert von der Matrix A, wenn es einen Vektor $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{w} \neq \vec{0}$ gibt, so dass

$$\boxed{A \cdot \vec{w} = \lambda \cdot \vec{w}}$$

gilt. Ein solcher Vektor $\vec{w}$ heisst Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Eigenschaft: Eigenvektoren ändern ihre Richtung nicht, wenn man sie mit der Matrix multipliziert!

Die Suche nach allen Eigenwerten und den dazugehörigen Eigenvektoren einer Matrix bezeichnet

man als Eigenwertproblem!

$\Rightarrow \quad A\cdot\vec{w} = \lambda\cdot\vec{w} \qquad (\text{mit } \vec{w}\neq\vec{0})$

$A\cdot\vec{w} - \lambda\cdot\vec{w} = \vec{0}$

$A\cdot\vec{w} - \lambda I_n\vec{w} = \vec{0}$

$(A-\lambda\cdot I_n)\cdot\vec{w} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ homogenes, lineares Gl.syst.

(*)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(**)

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das lin. Gl.system hat sicher den Nullvektor als Lösung! Damit es neben dem Nullvektor weitere Lösungen gibt, muss das System singulär (unterbestimmt) sein. Dies bedeutet, dass die Determinante der Koeffizientenmatrix $A-\lambda I_n$ Null sein muss!

$\Rightarrow \boxed{\det(A-\lambda I_n) = |A-\lambda I_n| = 0}$ charakteristische Gleichung

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 6 = \underbrace{\lambda^2-\lambda-6=0}_{\text{char. Gl.}}$

$\Rightarrow \lambda^2-\lambda-6=0$

$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$

$(\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$

$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = -2$

Eigenwerte der Matrix A

$\Rightarrow$ Bestimmung der Eigenvektoren (Eigenwerte einsetzen und das singuläre Gl. syst. lösen):

$\lambda_1 = 3$: $(A - 3I_2)\vec{\omega} = \vec{0}$

$\Downarrow$

$\begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\vec{\omega} = \vec{0}$

$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Downarrow$ GI

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ z. B. $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = E_{\lambda=3}$

↳ Menge aller Eigenvektoren ($t \neq 0$) zum Eigenwert $\lambda = 3$

$\Rightarrow$ Gerade im $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = 3$

- $\lambda_2 = -2$: Analog

$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - (-2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)\vec{\omega} = \vec{0}$

$1+2 \quad 2 \;\; | \; 0 \; | \quad 1$

$\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\vec{w} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$ GJ

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{z.B. } \vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3t \\ -2t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = E_{\lambda=-2}$$

