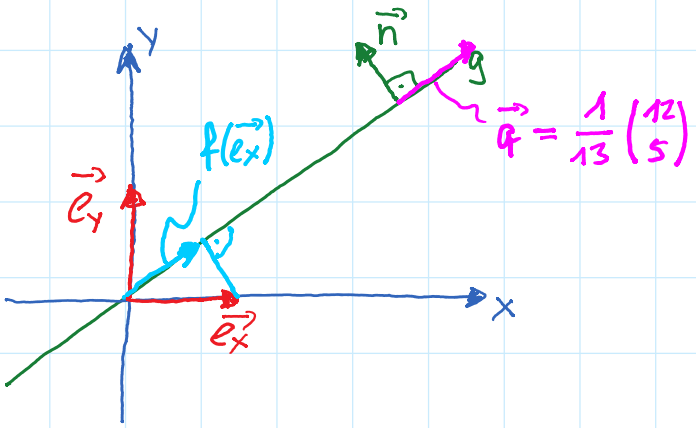
Projektion

Bsp: Projektion des $\mathbb{R}^2$ auf die Gerade $g: y = \frac{5}{12}x$

$\Rightarrow 5x - 12y = 0 \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{n} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$



$f(\vec{e_x})$ ist die Projektion auf den Richtungsvektor $\vec{q}$:

$$f(\vec{e_x}) = (\vec{e_x} \circ \vec{q}) \cdot \vec{q} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{169}\begin{pmatrix} 144 \\ 60 \end{pmatrix}$$

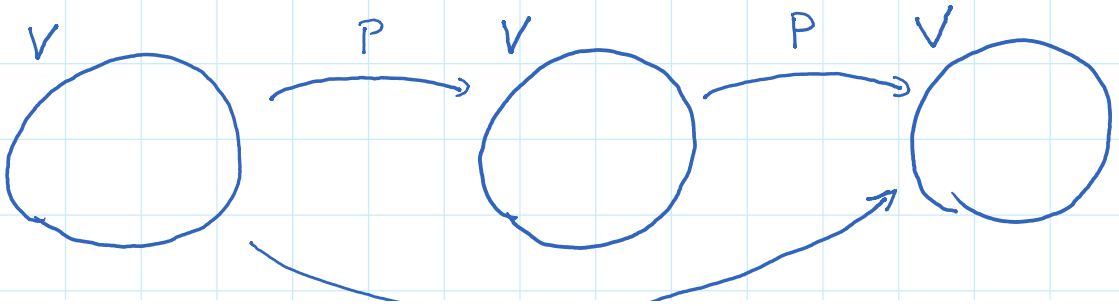
analog für das Bild des zweiten Basisvektors:

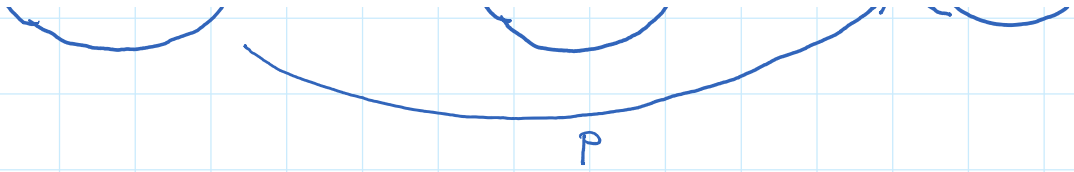
$$f(\vec{e_y}) = (\vec{e_y} \circ \vec{q}) \cdot \vec{q} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{169}\begin{pmatrix} 60 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Abbildungsmatrix A (Spalten sind die Bilder der Basisvekt.):

$$\Rightarrow P = \frac{1}{169}\begin{pmatrix} 144 & 60 \\ 60 & 25 \end{pmatrix}$$

Def: Eine quadratische $n \times n$-Matrix P nennt man eine Projektion, wenn $P^2 = P$ gilt.





$\Rightarrow$ Wird eine Projektion P auf eine Projektion angewendet, ändert sich natürlich nichts mehr!

Bsp: $P = \frac{1}{169}\begin{pmatrix} 144 & 60 \\ 60 & 25 \end{pmatrix} \Rightarrow P^2 = ?$

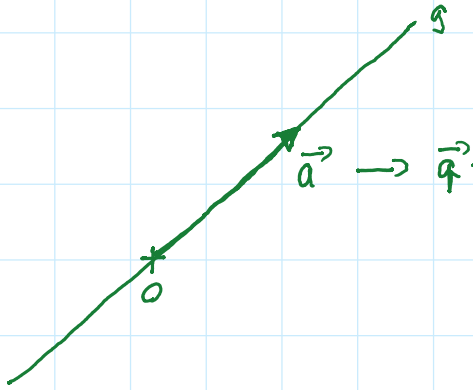
$P^2 = P$	$\frac{1}{169}\begin{pmatrix} 144 & 60 \\ 60 & 25 \end{pmatrix}$
$\frac{1}{169}\begin{pmatrix} 144 & 60 \\ 60 & 25 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$$a = \frac{1}{13^4}\left[12^2 \cdot 12^2 + 5 \cdot 12 \cdot 5 \cdot 12\right] = \frac{12^2(12^2+5^2)}{13^2 \cdot 13^2} = \frac{144}{169}$$

$$b = \frac{1}{13^4}\left[5 \cdot 12 \cdot 12^2 + 5^2 \cdot 5 \cdot 12\right] = \frac{5 \cdot 12 \cdot (12^2+5^2)}{13^2 \cdot 13^2} = \frac{60}{169} = c$$

$$d = \frac{1}{13^4}\left[5 \cdot 12 \cdot 5 \cdot 12 + 5^2 \cdot 5^2\right] = \frac{5^2(12^2+5^2)}{13^2 \cdot 13^2} = \frac{25}{169}$$ ✓

Bsp: Projektion des $\mathbb{R}^3$ auf die Gerade $g: \vec{r} = t\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}}_{\vec{a}}$



$\vec{a} \longrightarrow \vec{q} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$ Richtungsvektor (normiert!)

$$f(\vec{e_x}) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{169}\begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ 36 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{e_y}) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{169}\begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ -48 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{e_z}) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{169}\begin{pmatrix} 36 \\ -48 \\ 144 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{169}\begin{pmatrix} 9 & -12 & 36 \\ -12 & 16 & -48 \\ 36 & -48 & 144 \end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ auch hier gilt: $P^2 = P$

Satz: Sei $U = \{t\vec{q} \mid t \in \mathbb{R}\}$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ mit $|\vec{q}| = 1$, so erhält man die Projektion P des $\mathbb{R}^n$ in diesen Untervektor-

raum durch:

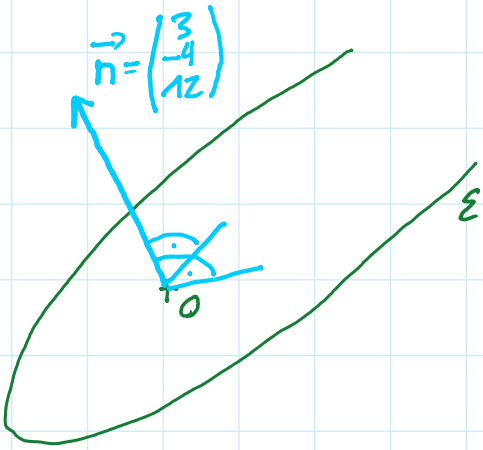
$$P = \vec{q} \cdot \vec{q}^T$$

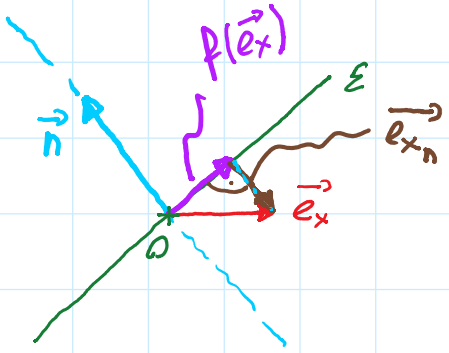
Zum letzten Beispiel: $\vec{q} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow P = \vec{q} \cdot \vec{q}^T = \begin{pmatrix} 3/13 \\ -4/13 \\ 12/13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & -\frac{4}{13} & \frac{12}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{13}\cdot\frac{3}{13} & \frac{3}{13}\cdot(-\frac{4}{13}) & \frac{3}{13}\cdot\frac{12}{13} \\ -\frac{4}{13}\cdot\frac{3}{13} & (-\frac{4}{13})\cdot(-\frac{4}{13}) & -\frac{4}{13}\cdot\frac{12}{13} \\ \frac{12}{13}\cdot\frac{3}{13} & \frac{12}{13}\cdot(-\frac{4}{13}) & \frac{12}{13}\cdot\frac{12}{13} \end{pmatrix}$$

$$P = \frac{1}{169}\begin{pmatrix} 9 & -12 & 36 \\ -12 & 16 & -48 \\ 36 & -48 & 144 \end{pmatrix}$$

Bsp: Projektion des $\mathbb{R}^3$ auf die Ebene ε: $3x - 4y + 12z = 0$





$$f(\vec{e}_x) = \vec{e}_x - \vec{e}_{x_n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}}_{\frac{1}{169}\begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ 36 \end{pmatrix}} = \frac{1}{13^2}\begin{pmatrix} 160 \\ 12 \\ -36 \end{pmatrix}$$

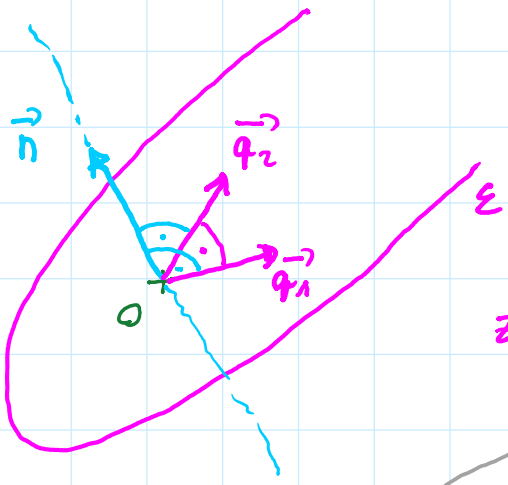
analog: $f(\vec{e}_y) = \vec{e}_y - \vec{e}_{y_n} = \frac{1}{13^2}\begin{pmatrix} 12 \\ 153 \\ 48 \end{pmatrix}$; $f(\vec{e}_z) - \vec{e}_{z_n} = \frac{1}{13^2}\begin{pmatrix} -36 \\ 48 \\ 25 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{13^2}\begin{pmatrix} 160 & 12 & -36 \\ 12 & 153 & 48 \\ -36 & 48 & 25 \end{pmatrix}$$

oder:

$\Rightarrow \{\vec{q}_1, \vec{q}_2\}$

oder:



$\Rightarrow \{\vec{q}_1, \vec{q}_2\}$ orthonormale Basis des Untervektorraums $U = E$

z.B. $\vec{q}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}$, $\vec{q}_2 = \frac{1}{65}\begin{pmatrix}36\\-48\\-25\end{pmatrix}$

$$P_1 = \vec{q}_1 \cdot \vec{q}_1^T = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}16 & 12 & 0\\12 & 9 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$P_2 = \vec{q}_2 \cdot \vec{q}_2^T = \frac{1}{4225}\begin{pmatrix}1296 & -1728 & -900\\-1728 & 2304 & 1200\\-900 & 1200 & 625\end{pmatrix}$$

Σ

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{13^2}\begin{pmatrix}160 & 12 & -36\\12 & 153 & 48\\-36 & 48 & 25\end{pmatrix}$$

Satz: Sei U ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ und $B = \{\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m\}$ eine orthonormale Basis von U, so ist die Projektion P des $\mathbb{R}^n$ auf U gegeben durch die Summe der Projektionen P_i auf die Basisvektoren von U:

$$P = \sum_{i=1}^{m} P_i = \sum_{i=1}^{m} \vec{q}_i \cdot \vec{q}_i^T = \vec{q}_1 \cdot \vec{q}_1^T + \dots + \vec{q}_m \cdot \vec{q}_m^T$$

Erweiterung Spektralsatz für symmetrische Matrizen!

Wir haben gesehen, das jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal diagonalisierbar ist: $A = Q \cdot D \cdot Q^T$

(D ist eine Diagonalmatrix mit den n reellen Eigenwerten auf der Diagonalen - wobei nicht alle Eigenwerte voneinander verschieden sein müssen; Q ist eine orthogonale

ander verschieden sein müssen; Q ist eine orthogonale Matrix bestehend aus Spaltenvektoren aus orthonormalen Eigenvektoren)

$$\Rightarrow A = Q \cdot D \cdot Q^T = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{q}_1 & \cdots & \vec{q}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} - & \vec{q}_1^T & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{q}_n^T & - \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \underbrace{\vec{q}_i \cdot \vec{q}_i^T}_{P_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot P_i$$

P_i ← Projektion auf den i-ten orthonormalen Basisvektor!

⇒ Jede symmetrische Matrix A lässt sich als Linearkomb. von Projektionsmatrizen beschreiben. Die Koeffizienten der Linearkombination sind gerade die Eigenwerte der Matrix A und die Projektionsmatrizen sind die Projektionen des $\mathbb{R}^n$ in die entsprechenden Eigenräume!

Bsp: $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/6 \end{pmatrix}$, $\vec{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$;

$$\Rightarrow \lambda_3 = -2, \vec{q}_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \lambda_1 \cdot \vec{q}_1 \cdot \vec{q}_1^T + \lambda_2 \vec{q}_2 \cdot \vec{q}_2^T + \lambda_3 \vec{q}_3 \cdot \vec{q}_3^T$$

$$= 1 \cdot \begin{pmatrix} 4/6 & 2/6 & 2/6 \\ 2/6 & 1/6 & 1/6 \\ 2/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Projektionen auf die Eigenvektoren!

$$= 1 \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Projektionen auf die Eigenräume

Spektrale Zerlegung!!