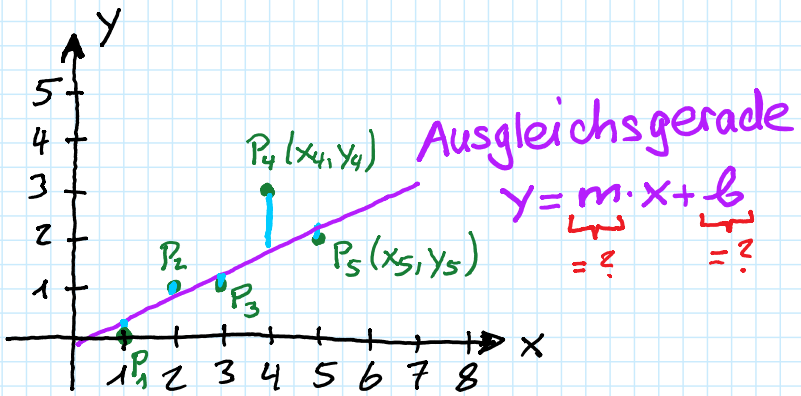
LE 2 - Anwendung Matrizenräume (Normalengleichung / Lineare Regression)

Bsp: Daten

x	y
1	0
2	1
3	1
4	3
5	2



Punkte im Ansatz ($y = m \cdot x + b$) einsetzen:

$$\begin{array}{ll} P_1(1,0): & m \cdot 1 + b = 0 \\ P_2(2,1): & m \cdot 2 + b = 1 \\ P_3(3,1): & m \cdot 3 + b = 1 \\ P_4(4,3): & m \cdot 4 + b = 3 \\ P_5(5,2): & m \cdot 5 + b = 2 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

überbestimmtes (singuläres) lin. Gl. syst.

$A \cdot \vec{z} = \vec{c}$

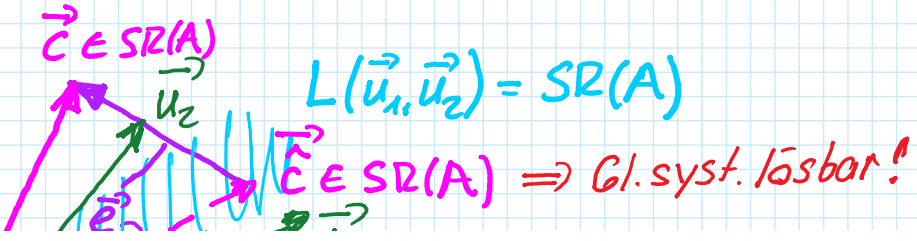
$rg(A) = 2$

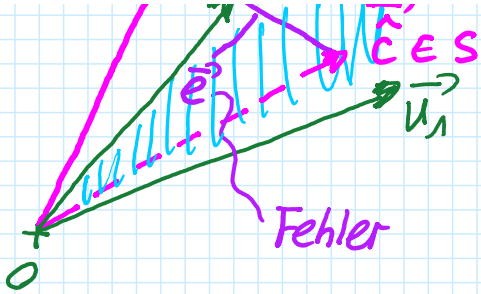
$rg(A|c) = 3$

$\Longrightarrow$ umschreiben als Vektorgleichung liefert:

$$m \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad m \cdot \vec{u}_1 + b \cdot \vec{u}_2 = \vec{c}$$

($\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{c}$)





⇒ Optimierungsproblem:

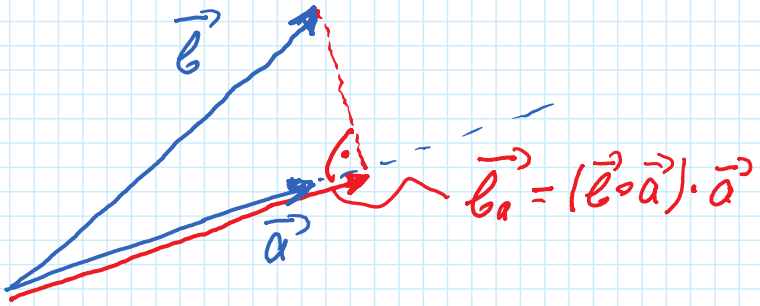
$|\vec{e}| = |\vec{c} - \hat{\vec{c}}|$ minimal

⇒ $\vec{c}$ auf SR(A) projezieren!

Gram-Schmidt-Verfahren

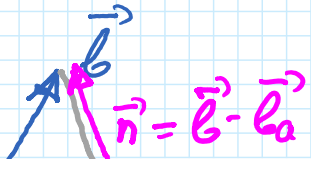
⇒ Seien $\vec{a}, \vec{e} \in \mathbb{R}^n$ und $|\vec{a}| = 1$, so gilt für die Projektion von $\vec{e}$ auf $\vec{a}$:

- Projektionslänge: $e_a = \vec{e} \circ \vec{a}$
- Projektionsvektor: $\vec{e}_a = (\vec{e} \circ \vec{a}) \cdot \vec{a}$



⇒ Sei $U = L(\vec{a}, \vec{e})$ ein zweidim. Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ ($\vec{a}, \vec{e}$ sind lin. unabhängig), so findet man wie folgt eine orthonormale Basis $B = \{\vec{o}_1, \vec{o}_2\}$ für diesen Untervektorraum (Gram-Schmidt-Verf.):

- $\vec{o}_1 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$

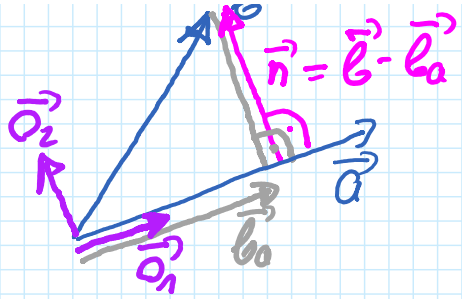


- $o_1 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot a$

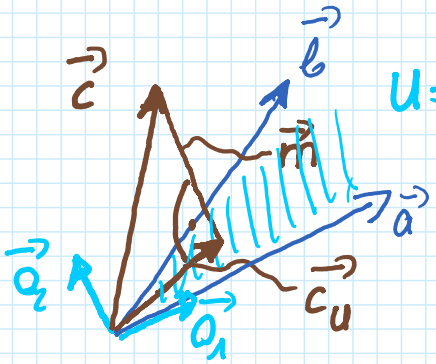
$\vec{b}_a = (\vec{b} \circ \vec{o}_1) \cdot \vec{o}_1$

$\vec{n} = \vec{b} - \vec{b}_a = \vec{b} - (\vec{b} \circ \vec{o}_1) \cdot \vec{o}_1$

- $\vec{o}_2 = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}$



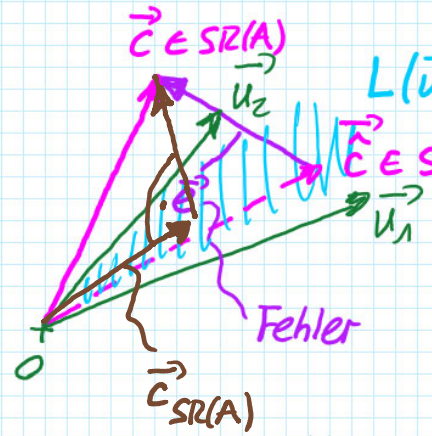
$\Rightarrow$ Projektion in einen zweidim. Untervektorraum:



$U = L(\vec{o}_1, \vec{o}_2)$ orthonormale Basis

$$\Rightarrow \boxed{\vec{c}_u = (\vec{c} \circ \vec{o}_1) \cdot \vec{o}_1 + (\vec{c} \circ \vec{o}_2) \cdot \vec{o}_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{m} = \vec{c} - \vec{c}_u}$$



$\Rightarrow$ Optimierungsproblem:

$|\vec{e}| = |\vec{c} - \vec{\hat{c}}|$ minimal

$\Rightarrow$ $\vec{c}$ auf $SR(A)$ projezieren! $\Rightarrow$ $\vec{c}_{SR(A)}$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{o}_1 = \frac{1}{|\vec{u}_1|} \cdot \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0.135 \\ 0.269 \\ 0.405 \\ 0.539 \\ 0.674 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{o}_2 = \frac{1}{|\vec{u}_2 - (\vec{u}_2 \circ \vec{o}_1) \cdot \vec{o}_1|} \cdot (\vec{u}_2 - (\vec{u}_2 \circ \vec{o}_1) \cdot \vec{o}_1) = \begin{pmatrix} 0.763 \\ 0.477 \\ 0.191 \\ -0.095 \\ -0.381 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{c}_{SR(A)} = (\vec{c} \circ \vec{o}_1) \cdot \vec{o}_1 + (\vec{c} \circ \vec{o}_2) \cdot \vec{o}_2 = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.8 \\ 1.4 \\ 2.0 \\ 2.6 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Ersetzt man im lin. Gl. system $\vec{c}$ durch $\vec{c}_{SR(A)}$ so ist das System eindeutig lösbar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 4/5 \\ 7/5 \\ 2 \\ \cdot \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & \\ 4 & 1 & \\ 5 & 1 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 7/5 \\ 2 \\ 13/5 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$rg(A) = rg(Ac_{SR(A)}) = 2$$

$$m = 0.6 = 3/5$$

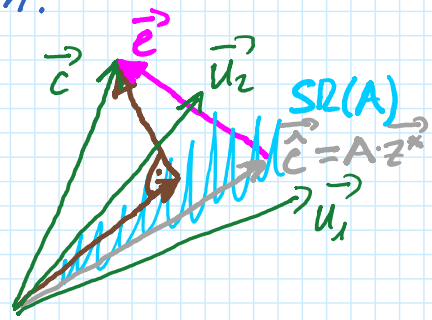
$$b = -0.4 = -2/5$$

Normalengleichung

Die Lösung des Optimierungsproblem:

$$|\vec{c} - \hat{\vec{c}}| \stackrel{!}{=} \text{Minimal}$$

$$|\underbrace{\vec{c} - A\vec{z}^*}_{\vec{e}}| = \text{Minimal}$$



erhalten wir, wenn $\vec{e}$ orthogonal zum Spaltenraum SR(A) steht!

$\Rightarrow$ Somit liegt der (Fehlervektor) $\vec{e}$ im Nullraum von der transponierten Matrix A^T:

$$\vec{e} \in NR(A^T)$$

Daher gilt: $A^T \cdot \vec{e} = \vec{0}$

$$\Rightarrow A^T \cdot (\vec{c} - A\vec{z}^*) = \vec{0}$$

$$A^T \cdot \vec{c} - A^T A \cdot \vec{z}^* = \vec{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{A^T \cdot A \cdot \vec{z}^* = A^T \vec{c}}$$

Normalengleichung

(liefert mit $\vec{z}^*$ die

"beste" Näherungslösung für das lin. Gl.syst.

$$\boxed{A\vec{z}=\vec{c}}$$

$$\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\3&1\\4&1\\5&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}m\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\3\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\3&1\\4&1\\5&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}m\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\3\\2\end{pmatrix}$$

$A \cdot \vec{z} = \vec{c}$

$rg(A)=2$

$rg(A|c)=3$

$$\begin{pmatrix}55&15\\15&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}27\\7\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$m=\frac{\begin{vmatrix}27&15\\7&5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}55&15\\15&5\end{vmatrix}}=\frac{135-105}{275-225}=\frac{30}{50}=\frac{3}{5}$$

$$b=\frac{\begin{vmatrix}55&27\\15&7\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}55&15\\15&5\end{vmatrix}}=\frac{385-405}{275-225}=-\frac{20}{50}=-\frac{2}{5}$$

Bzw: $A\vec{z}=\vec{c} \Rightarrow A^TA\vec{z}=A^T\vec{c} \Rightarrow \boxed{\vec{z}=(A^TA)^{-1}\cdot A^T\cdot\vec{c}}$

$A^+=(A^T\cdot A)^{-1}\cdot A^T$

Pseudoinverse zu A