Definition exponentielles Wachstum

Wir haben in den beiden einführenden Beispielen

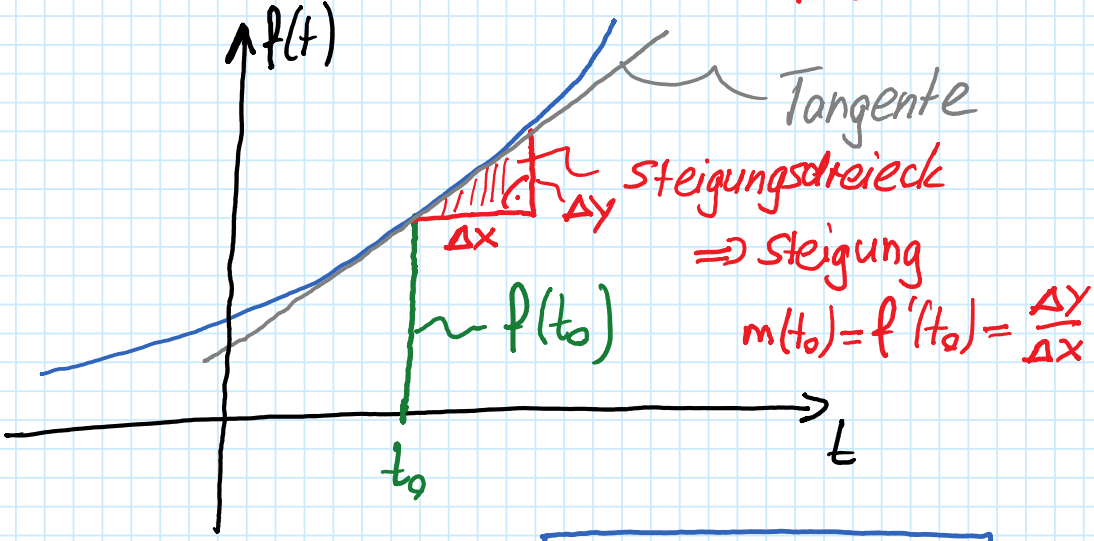
- Zinseszinsen
- Pilzbefall

Situationen kennengelernt, bei denen ein exponentielles Wachstum vorliegt. Hier nun eine übliche Definition dazu:

Def: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, bei welcher zu jedem Zeitpunkt t_0 die Funktionsänderung $f'(t_0)$ proportional zum aktuellen Funktionswert $f(t_0)$ ist, nennt man ein exponentielles Wachstum.

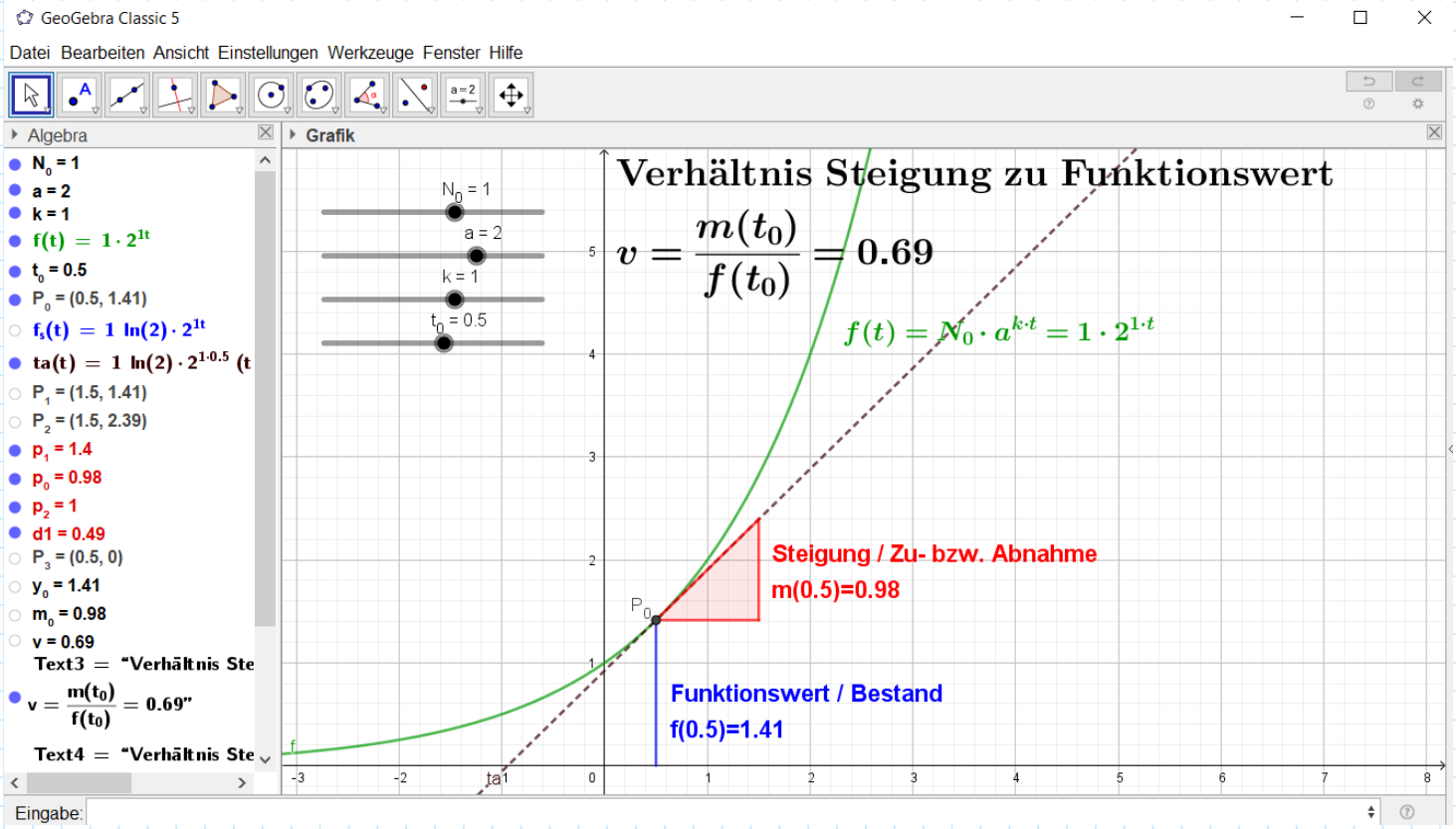
$$f'(t) = k \cdot f(t)$$

k = Proportionalitäts-faktor



Exponentialfunktionen $\boxed{y = f(t) = A \cdot e^{kt}}$ erfüllen die Bedingung der obigen Definition. A bezeichnet man als Anfangswert ($y_0 = f(0) = A$) und der

Proportionalitätsfaktor k die Wachstumskonstante (ist $k>0$ haben wir positives Wachstum und für $k<0$ negatives Wachstum).



Die beiden Einführungsbeispiele erfüllen die Bedingung in der Def. des exponentiellen Wachstums auch:

- Zinseszinsformel ($K(t) = 1000 \cdot 1.05^t$)

Allgemein: Wird ein Anfangsbestand K_0 pro Zeitschritt $\Delta t = 1$ um p Prozent vergrössert, so kann der funktionale Zusammenhang wie folgt beschrieben werden

$$A(t) = A_0 \cdot (1+p)^t$$

Wir formen um:

$$A(t) = A_0 \cdot (1+p)^t = A_0 \cdot e^{\ln\left((1+p)^t\right)}$$

$$= A_0 \cdot e^{\ln(1+p) \cdot t}$$

$\Rightarrow$ Wachstumskonstante $\boxed{k = \ln(1+p)}$

- Pilzbefall $\left(A(t) = 0.1 \cdot 2^{t/5}\right)$

Allgemein: Wird ein Anfangsbestand A_0 in der Zeit T_v um den Faktor v vervielfacht, so lässt sich dieser Prozess durch die folgende Formel beschreiben:

$$\boxed{A(t) = A_0 \cdot v^{t/T_v}}$$

Wir formen um:

$$A(t) = A_0 \cdot v^{t/T_v} = A_0 \cdot e^{\ln\left(v^{t/T_v}\right)}$$

$$= A_0 \cdot e^{\frac{\ln(v)}{T_v} \cdot t}$$

$\Rightarrow$ Wachstumskonstante $\boxed{k = \frac{\ln(v)}{T_v}}$

$$N(t) = N_0 \cdot v^{\frac{t}{T_v}} = N_0 \cdot (1+p)^t = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

Geg. \ Ges.	v, T_v	p	λ
v, T_v	–	$p = v^{\frac{1}{T_v}} - 1$	$\lambda = \frac{1}{T_v} \cdot \ln(v)$
p	$T_v = \frac{\ln(v)}{\ln(1+p)}$	–	$\lambda = \ln(1+p)$
λ	$T_v = \frac{\ln(v)}{\lambda}$	$p = e^{\lambda} - 1$	–